数理解析研究所講究録
51巻 1968年 25-36

整多項式の計算の一形式

慶大工　山内二郎
電気試　戸田英雄

§1. まえおき

Brookhaven National Lab. における一松信氏からの御手紙（NOV. 14. 1966）“.. 最近はじめて知ったのですが，n 次多項式を計算するのに必ずしも n 回の乗法と n 回の加法を必要としない方法がある。.... 一例として $n=6$ のときをあげますと，...” にヒントを得て，一般に M 次の多項式のとき 2 次式を用いて乗算回数を減らすことを問題にし，$\left(\left[\frac{M+1}{2}\right]+1\right)$ 回の乗算と $(M+1)$ 回の加算で計算が出来ることを山内二郎（慶大工）が与えた．これを §2 で述べる．戸田英雄（電試計算センター）が具体的に検討したが，これを §3 に述べる．

§2. 整多項式の計算

M 次の整多項式の計算には，一般に M 回の乗算を必要とす

る．2次式を用いて，この乗算回数を減らすことを問題とする．

Mが偶数で　$2N$　のとき　乗算　$N+1$　回，加算　$2N+1$　回

Mが奇数で　$2N+1$　のとき　乗算　$N+2$　回，加算　$2N+2$　回

一般に $\left(\left[\frac{M+1}{2}\right]+1\right)$ 回の乗算と　$(M+1)$　回の加算

とし得る．M次の項の係数が1ならば乗算回数は $\left[\frac{M+1}{2}\right]$ となる．

Mが $2N+1$　のとき　$f(x)=\sum_{i=0}^{2N+1} a_i x^{2N+1-i}$

$$= a_0 x \sum_{i=0}^{2N} \frac{a_i}{a_0} x^{2N-i} + a_{2N+1}$$

で，Mが $2N$ のときのものをつかえばよいので，以下 $M=2N$ のときを計算する．

$$f(x) = a_0 \sum_{i=0}^{2N} \frac{a_i}{a_0} x^{2N-i}$$

$$P_1 = x(x+A)$$

$$P_2 = (P_1 + x + B_1)(P_1 + C_1)$$

$$P_3 = (P_2 + B_2)(P_1 + C_2)$$

$$\cdots$$

$$P_k = (P_{k-1} + B_{k-1})(P_1 + C_{k-1})$$

$$\cdots$$

$$P_N = (P_{N-1} + B_{N-1})(P_1 + C_{N-1})$$

$$f(x) = a_0 (P_N + B_N)$$

として計算すると　乗算回数 $N+1$，加算回数 $2N+1$　である．

P_1 を P と記す．

$$x^2 = P - xA$$

$$x^3 = xP - PA + xA^2$$

$$x^{2n} = \sum_{i=0}^{n-1} P^{n-i} \binom{n-1+i}{2i} A^{2i} - \sum_{i=0}^{n-1} x P^{n-1-i} \binom{n+i}{2i+1} A^{2i+1}$$

$$x^{2n+1} = \sum_{i=0}^{n-1} x P^{n-i} \binom{n-1+i}{2i} A^{2i} - \sum_{i=0}^{n-1} (P^{n-i} - x P^{n-1-i} A) \binom{n+i}{2i+1} A^{2i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} x P^{n-i} \binom{n+i}{2i} A^{2i} - \sum_{i=0}^{n-1} P^{n-i} \binom{n+i}{2i+1} A^{2i+1}$$

$$x^{2n+2} = \sum_{i=0}^{n} P^{n+1-i} \binom{n+i}{2i} A^{2i} - \sum_{i=0}^{n} x P^{n-i} \binom{n+1+i}{2i+1} A^{2i+1}$$

で数学的帰納法で　x^{2n}, x^{2n+1}　は証明される．

$[C^j; h, k]$ は $C_h, C_{h+1}, C_{h+2}, \cdots C_{k-1}, C_k$ のうち異る j 個の積のあらゆる組合せの総和

$j=0$ のときは 1, $j > k-h+1$ のとき 0

$$P_2 = (P + x + B_1)(P + C_1) = P^2 + xP + P(B_1 + C_1) + xC_1 + B_1C_1$$

$$P_3 = (P_2 + B_2)(P + C_2) = P^3 + xP^2 + P^2(B_1 + C_1 + C_2) + xP(C_1 + C_2)$$

$$+ P(B_1(C_1 + C_2) + C_1C_2) + xC_1C_2 + B_1C_1C_2 + B_2C_2$$

$$P_k = (P_{k-1} + B_{k-1})(P + C_{k-1})$$

$$P_2 = P^2 + xP + P(B_1 + [c^1; 1, 1]) + x[c^1; 1, 1] + B_1[c^1; 1, 1]$$

$$P_3 = P^3 + xP^2 + P^2(B_1 + [c^1; 1, 2]) + xP[c^1; 1, 2] + P\{B_1[c^1; 1, 2]$$

$$+ B_2 + [c^2; 1, 2]\} + x[c^2; 1, 2] + B_1[c^2; 1, 2] + B_2[c^1; 2, 2]$$

$$P_4 = P^4 + xP^3 + P^3(B_1 + [c^1; 1, 3]) + xP^2[c^1; 1, 3]$$

$$+ P^2\{B_1[c^1; 1, 3] + B_2 + [c^2; 1, 3]\} + xP[c^2; 1, 3]$$

$$+ P\{B_1[c^2; 1, 3] + B_2[c^1; 2, 3] + B_3 + [c^3; 1, 3]\}$$

$$+ x[c^3; 1, 3] + \{B_1[c^3; 1, 3] + B_2[c^2; 2, 3] + B_3[c^1; 3, 3]\}$$

$$P_k = \sum_{i=0}^{k-1} P^{k-i}\left\{\sum_{j=1}^{i} B_j\cdot[c^{i-j}; j, k-1] + [c^i; 1, k-1]\right\}$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} xP^{k-1-i}[c^i; 1, k-1] + \sum_{j=1}^{k-1} B_j\cdot[c^{k-j}; j, k-1]$$

$$P_{k+1} = (P_k + B_k)(P + C_k)$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} P^{k+1-i}\left\{\sum_{j=1}^{i} B_j\cdot[c^{i-j}; j, k-1] + [c^i; 1, k-1]\right\}$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} P^{k+1-i} C_k \left\{\sum_{j=1}^{i-1} B_j\cdot[c^{i-1-j}; j, k-1] + [c^{i-1}; 1, k-1]\right\}$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} x P^{k-i} [C^i ; 1, k-1] + \sum_{i=1}^{k} x P^{k-i} C_k [C^{i-1} ; 1, k-1]$$

$$+ P \sum_{j=1}^{k-1} B_j [C^{k-j} ; j, k-1] + P B_k$$

$$+ \sum_{j=1}^{k-1} B_j C_k [C^{k-j} ; j, k-1] + B_k C_k$$

$$[C^{i-j} ; j, k-1] + C_k [C^{i-1-j} ; j, k-1] = [C^{i-j} ; j, k]$$

$$[C^{i} ; 1, k-1] + C_k [C^{i-1} ; 1, k-1] = [C^{i} ; 1, k]$$

$$P_{k+1} = \sum_{i=0}^{k} P^{k+1-i} \left\{ \sum_{j=1}^{i} B_j [C^{i-j} ; j, k] + [C^i ; 1, k] \right\}$$

$$+ \sum_{i=0}^{k} x P^{k-i} [C^i ; 1, k] + \sum_{j=1}^{k} B_j [C^{k+1-j} ; j, k]$$

$\therefore$ Q.E.D.

$$P_N = \sum_{i=0}^{N-1} P^{N-i} \left\{ \sum_{j=1}^{i} B_j [C^{i-j} ; j, N-1] + [C^i ; 1, N-1] \right\}$$

$$+ \sum_{i=0}^{N-1} x P^{N-1-i} [C^i ; 1, N-1] + \sum_{j=1}^{N-1} B_j [C^{N-j} ; j, N-1]$$

$$\sum_{i=0}^{2N} \frac{a_i}{a_0} x^{2N-i} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_{2k}}{a_0} x^{2N-2k} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_{2k+1}}{a_0} x^{2N-1-2k} + \frac{a_{2N}}{a_0}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_{2k}}{a_0} \left\{ \sum_{i=0}^{N-1-k} P^{N-k-i} \binom{N-1-k+i}{2i} A^{2i} - \sum_{i=0}^{N-1-k} x P^{N-1-k-i} \binom{N-k+i}{2i+1} A^{2i+1} \right\}$$

$$+ \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_{2k+1}}{a_0} \left\{ \sum_{i=0}^{N-1-k} x P^{N-1-k-i} \binom{N-1-k+i}{2i} A^{2i} - \sum_{i=0}^{N-2-k} P^{N-1-k-i} \binom{N-1-k+i}{2i+1} A^{2i+1} \right\}$$

$$+ \frac{a_{2N}}{a_0}$$

$$\sum_{i=1}^{2N} \frac{a_i}{a_0} x^{2N-i} = \sum_{i=0}^{N-1} P^{N-i} \sum_{j=0}^{2i} (-)^j \frac{a_{2i-j}}{a_0} \binom{N-1-i+j}{j} A^j + \sum_{i=0}^{N-1} x P^{N-1-i} \cdot$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{2i+1} (-)^j \frac{a_{2i+1-j}}{a_0} \binom{N-1-i+j}{j} A^j + \frac{a_{2N}}{a_0}$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} P^{N-i} K_{2i} + \sum_{i=0}^{N-1} x P^{N-1-i} K_{2i+1} + K_{2N} = P_N + B_N$$

$$K_{2i} = \sum_{j=0}^{2i} (-)^j \frac{a_{2i-j}}{a_0} \binom{N-1-i+j}{j} A^j = \sum_{j=1}^{i} B_j [C^{i-j}; j, N-1] + [C^i; 1, N-1]$$

$$(0 \le i \le N-1)$$

$$K_{2i+1} = \sum_{j=0}^{2i+1} (-)^j \frac{a_{2i+1-j}}{a_0} \binom{N-1-i+j}{j} A^j = [C^i; 1, N-1] \quad (0 \le i \le N-1)$$

$$K_{2N} = \frac{a_{2N}}{a_0} = \sum_{j=1}^{N} B_j [C^{N-j}; j, N-1]$$

$$K_0 = 1$$

$$K_1 = \frac{a_1}{a_0} - \binom{N}{1} A = 1 \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{N}\left(\frac{a_1}{a_0} - 1\right), \quad \frac{a_1}{a_0} = 1 + \binom{N}{1} A$$

$$K_2 = \sum_{j=0}^{2} (-)^j \frac{a_{2-j}}{a_0} \binom{N-2+j}{j} A^j = \frac{a_2}{a_0} - \binom{N-1}{1} A \left(1 + \binom{N}{1} A\right) + \binom{N}{2} A$$

$$= \frac{a_2}{a_0} - \binom{N-1}{1} A - \binom{N}{2} A^2 = \frac{a_2}{a_0} + \binom{N-1}{2} A - \binom{N}{2} A (1 + A)$$

$$K_3 = \sum_{j=0}^{3} (-1)^j \frac{a_{3-j}}{a_0} \binom{N-2+j}{j} A^j$$

$$= \frac{a_3}{a_0} - \binom{N-1}{1} A \left\{ K_2 + \binom{N-1}{1} A + \binom{N}{2} A^2 \right\} + \binom{N}{2} A^2 \left\{ 1 + \binom{N}{1} A \right\} - \binom{N+1}{3} A^3$$

$$= \frac{a_3}{a_0} - K_2 A \binom{N-1}{1} + A^2 \left\{ \binom{-N+1}{1}\binom{N-1}{1} + \binom{-N+1}{2} \right\} + A^3 \left\{ \binom{-N+1}{1}\binom{N}{2} + \binom{-N+1}{2}\binom{N}{1} + \binom{-N+1}{3} \right\}$$

$$= \frac{a_3}{a_0} - K_2 A \binom{N-1}{1} - A^2 \binom{N-1}{2} - A^3 \binom{N}{3}$$

$$= \frac{a_3}{a_0} - K_2 A \binom{N-1}{1} + A^2 \binom{N-1}{3} - \binom{N}{3} A^2 (1 + A)$$

$$K_{2i} = \frac{a_{2i}}{a_0} - \sum_{j=1}^{i} K_{2i-2j} A^{2j} \binom{N-i+j}{2j} - \sum_{j=1}^{i} K_{2i-2j+1} A^{2j-1} \binom{N-1-i+j}{2j-1}$$

$$K_{2i+1} = \frac{a_{2i+1}}{a_0} - \sum_{j=1}^{i} K_{2i+1-2j} A^{2j} \binom{N-1-i+j}{2j} - \sum_{j=1}^{i+1} K_{2i+2-2j} A^{2j-1} \binom{N-1-i+j}{2j-1}$$

$$K_{2i+2} = \sum_{k=0}^{i+1} \frac{a_{2i+2-2k}}{a_0} \binom{N-2-i+2k}{2k} A^{2k} - \sum_{k=1}^{i+1} \frac{a_{2i+2-2k+1}}{a_0} \binom{N-2-i+2k-1}{2k-1} A^{2k-1}$$

$$= \frac{a_{2i+2}}{a_0} + \sum_{k=1}^{i+1}\binom{N-2-i+2k}{2k}A^{2k}\left\{\sum_{j=0}^{i+1-k}K_{2i+2-2k-2j}A^{2j}\binom{N-i-1+k+j}{2j}\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{i+1-k}K_{2i+2-2k+1-2j}A^{2j-1}\binom{N-1-i-1+k+j}{2j-1}\right\}$$
$$-\sum_{k=1}^{i+1}\binom{N-2-i+2k-1}{2k-1}A^{2k-1}\left\{\sum_{j=0}^{i+1-k}K_{2i+2-2k+1-2j}A^{2j}\binom{N-1-i-1+k+j}{2j}\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{i+2-k}K_{2i+2-2k+2-2j}A^{2j-1}\binom{N-1-i-1+k+j}{2j-1}\right\}$$

このうち $K_{2i+2-2k}A^{2k}$ の係数

$$= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{N-2-i+2k-2j}{2k-2j}\binom{N-1-i+k}{2j} - \sum_{j=1}^{k}\binom{N-2-i+2k-2j+1}{2k-2j+1}\binom{N-1-i+k}{2j-1}$$
$$= \sum_{j=0}^{2k-1}\binom{-N+1+i}{2k-j}\binom{N-1-i+k}{j} = -\binom{N-1-i+k}{2k}$$

$K_{2i+2-2k+1}A^{2k-1}$ の係数

$$= \sum_{j=1}^{k-1}\binom{N-2-i+2k-2j}{2k-2j}\binom{N-2-i+k}{2j-1} - \sum_{j=0}^{k-1}\binom{N-2-i+2k-2j-1}{2k-2j-1}\binom{N-2-i+k}{2j}$$
$$= \sum_{j=0}^{2k-2}\binom{-N+1+i}{2k-1-j}\binom{N-2-i+k}{j} = -\binom{N-2-i+k}{2k-1}$$

A^{2i+2} の係数

$$= \sum_{k=1}^{i+1}\binom{N-2-i+2k}{2k}\binom{N}{2i+2-2k} - \sum_{k=1}^{i+1}\binom{N-2-i+2k-1}{2k-1}\binom{N}{2i+2-2k+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{2i+2}\binom{-N+1+i}{k}\binom{N}{2i+2-k} = -\binom{N}{2i+2}$$

K_{2i+3} についても全く同様な計算によって K_{2i+1} で $i=i+1$ においたものになる。 ∴ Q.E.D.

K_{2i}, K_{2i+1} は更に

$$K_{2i} = \frac{a_{2i}}{a_0} - \sum_{j=1}^{i-1}K_{2i-2j}A^{2j}\binom{N-i+j}{2j} - \sum_{j=1}^{i-1}K_{2i-2j+1}A^{2j-1}\binom{N-1-i+j}{2j-1}$$
$$+ A^{2i-1}\binom{N-1}{2i} - A^{2i-1}(1+A)\binom{N}{2i}$$

$$K_{2i+1} = \frac{a_{2i+1}}{a_0} - \sum_{j=1}^{i-1} K_{2i+1-2j} A^{2j} \binom{N-1-i+j}{2j} - \sum_{j=1}^{i} K_{2i+2-2j} A^{2j-1} \binom{N-1-i+j}{2j-1}$$
$$+ A^{2i} \binom{N-1}{2i+1} - A^{2i}(1+A)\binom{N}{2i+1}$$

特に $K_{2N-1} = \dfrac{a_{2N-1}}{a_0} - A K_{2N-2}$

$$K_{2N-2} = \frac{a_{2N-2}}{a_0} - A\{K_{2N-3} + AK_{2N-4}\}$$

$$K_{2N-3} = \frac{a_{2N-3}}{a_0} - A\{2K_{2N-4} + A(K_{2N-5} + AK_{2N-6})\} \quad (N>3)$$

ここで $K_{2i+1} = [C^i; 1, N-1]$ $(0 \leq i \leq N-1)$ であるから

$(C_1, C_2, \cdots, C_{N-1})$ は $Z^{N-1} - Z^{N-2}K_3 + Z^{N-3}K_5 - + \cdots + (-1)^{N-1}K_{2N-1} = 0$

の根として決定され，$[C^{i-j}; j, N-1]$ も求められる．

次に $K_2 = B_1 + [C^1; 1, N-1]$ によって $B_1 = K_2 - K_3$

$K_4 = B_2 + B_1[C^1; 1, N-1] + [C^2; 1, N-1]$ によって

$B_2 = K_4 - B_1K_3 - K_5$

$B_1, B_2, \cdots, B_{i-1}$ が順に求められると

$B_i = K_{2i} - \sum_{j=1}^{i-1} B_j[C^{i-j}; j, N-1] - K_{2i+1}$ によって B_i が求められ

最後に $B_N = \dfrac{a_{2N}}{a_0} - \sum_{j=1}^{N-1} B_j[C^{N-j}; j, N-1]$

$\boxed{M=6 \quad (N=3)}$

$$A = \frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{a_0} - 1\right)$$

$$K_2 = \frac{a_2}{a_0} + A - 3\,\overline{A(1+A)}$$

$$K_3 = \frac{a_3}{a_0} - A\{2K_2 + \overline{A(1+A)}\}$$

$$K_4 = \frac{a_4}{a_0} - A\{K_3 + AK_2\}$$

$$K_5 = \frac{a_5}{a_0} - AK_4$$

$$z^2 - zK_3 + K_5 = 0 \quad \rightarrow \quad (C_1, C_2)$$

$$B_1 = K_2 - K_3$$

$$B_2 = K_4 - B_1 K_3 - K_4$$

$$B_3 = \frac{a_6}{a_0} - B_1 K_5 - B_2 C_2$$

$$P_1 = x(x+A)$$

$$P_2 = (P_1 + x + B_1)(P_1 + C_1)$$

$$P_3 = (P_2 + B_2)(P_1 + C_2)$$

$$f(x) = a_0 (P_3 + B_3)$$

$\boxed{M=7}$

$$f(x) = a_0 x (P_3 + B_3) + a_7$$

$\boxed{M = 8 \ (N=4)}$ $\qquad A = \frac{1}{4}\left(\frac{a_1}{a_0} - 1\right)$

$$K_2 = \frac{a_2}{a_0} + 3A - 6\,\overline{A(1+A)}$$

$$K_3 = \frac{a_3}{a_0} - A\left\{3K_2 - A + 4\,\overline{A(1+A)}\right\}$$

$$K_4 = \frac{a_4}{a_0} - A\left\{2K_3 - A + 4\,\overline{A(1+A)}\right\}$$

$$K_5 = \frac{a_5}{a_0} - A\left\{2K_4 + A(K_3 + AK_2)\right\}$$

$$K_6 = \frac{a_6}{a_0} - A\left\{K_5 + AK_4\right\}$$

$$K_7 = \frac{a_7}{a_0} - AK_6$$

$$z^3 - z^2 K_3 + zK_5 - K_7 = 0 \quad \rightarrow \quad (C_1, C_2, C_3)$$

$$B_1 = K_2 - K_3$$

$$B_2 = K_4 - B_1 K_3 - K_5$$

$$B_3 = K_6 - B_1 K_5 - B_2 (C_2 + C_3) - K_7$$

$$B_4 = \frac{a_8}{a_0} - B_1 K_7 - B_2 C_2 C_3 - B_3 C_3$$

$$P_1 = x(x + A)$$

$$P_2 = (P_1 + x + B_1)(P_1 + C_1)$$

$$P_3 = (P_2 + B_2)(P_1 + C_2)$$

$$P_4 = (P_3 + B_3)(P_1 + C_3)$$

$$f(x) = a_0 (P_4 + B_4)$$

$\boxed{M=9}$ $\boxed{M=10}$ $\boxed{M=11}$ の公式は山内は出しているが省略する

§3. 数値例

$\boxed{M=6}$

$\mathrm{Tan}^{-1} x = x \sum_{i=1}^{6} D_{2i+1} y^i$, $y = x^2$ とおく.

$|x| \le 0.5$ で minmax error $= 0.53 \times 10^{-10}$, ここで

$D_1 = .99999\ 99984$, $D_3 = -.33333\ 30874$,

$D_5 = .19998\ 90382$, $D_7 = -.14264\ 00715$,

$D_9 = .10887\ 01065$, $D_{11} = -.78109\ 64670$ E-01 ,

$D_{13} = .36589\ 06466$ E-01 ,

の場合:

$A = -.10449\ 271$ E+01 , $A_0 = D_{13}$,

$B_1 = .18988\ 476$ E+01 ,

$B_2 = .91647\ 570$ E+01 ,

$B_3 = .60003\ 811$ E+02 ,

$C_1 = .23040\ 106\ E01$, $C_2 = -.24131\ 97\ E01$ で

$y = x^2$

$P_1 = y \cdot (y + A)$

$P_2 = (P_1 + y + B_1) \cdot (P_1 + C_1)$

$P_3 = (P_2 + B_2) \cdot (P_1 + C_2)$

$\tan^{-1} x = A_0 \cdot (P_3 + B_3) \cdot x$ minmax error $= .7 \times 10^{-8}$

$\boxed{M = 6}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} 2^x = \sum_{i=0}^{6} D_i x^i \qquad |x| \leq 0.5 \qquad \text{minmaxerror} = .13 \times 10^{-8}$$

, ここで

$D_0 = .70710\ 67816$, $D_1 = .49012\ 90895$

$D_2 = .16986\ 57652$, $D_3 = .39246\ 75116\ E-01$

$D_4 = .68012\ 98766\ E-02$, $D_5 = .94751\ 82234\ E-03$

$D_6 = .10851\ 12780\ E-03$

の場合：

$A = .25773\ 265\ E+01$, $A_0 = D_6$

$B_1 = -.10653\ 185\ E+03$

$B_2 = .14215\ 125\ E+05$

$B_3 = -.32148\ 840\ E+04$

$C_1 = .12783\ 041\ E+03$, $C_2 = .16297\ 222\ E+02$ で

上例のM=6の式が使える. minmax error $= .7 \times 10^{-6}$

となった.